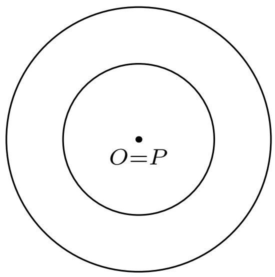
Zadanie 21. Okrąg o środku $S = (3, 2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$$

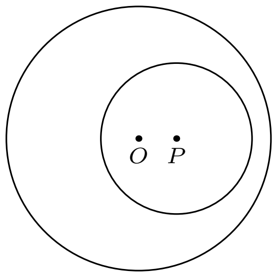
i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu okręgów.

Przed rozwiązaniem tego zadania przypomnijmy, jak mogą być położone dwa okręgi. Przypuśćmy zatem, że mamy dany okrąg o środku w punkcie O i promieniu R oraz drugi okrąg o środku w punkcie P i promieniu r. Załóżmy ponadto, że $r \leq R$ oraz że odległość środków tych okręgów (czyli długość odcinka OP) jest równa d. Mamy wówczas następujące możliwe położenia tych okręgów:

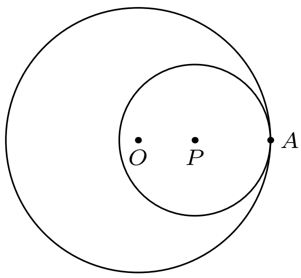
- jeśli $d = 0$ (tzn. $O = P$) oraz $R = r$, to okręgi pokrywają się (czyli tak naprawdę mamy do czynienia z jednym okręgiem,
- jeśli $d = 0$ (tzn. $O = P$) oraz $R > r$, to okręgi są współśrodkowe i okrąg o promieniu r leży w całości wewnątrz okręgu o promieniu R,



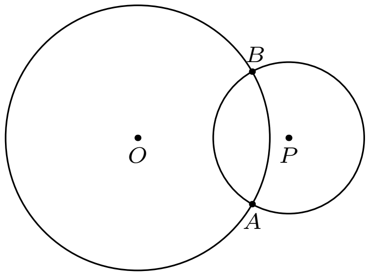
- jeśli $0 < d < R - r$, to okrąg o promieniu r leży w całości wewnątrz okręgu o promieniu R (mówimy wtedy, że okręgi są rozłączne wewnętrznie),



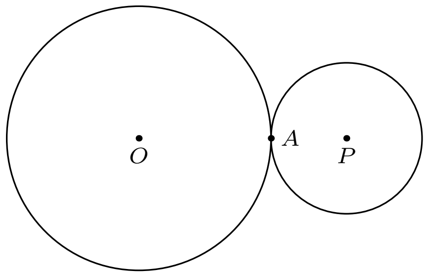
- jeśli $0 < d = R - r$, to okrąg o promieniu r jest wewnętrznie styczny do okręgu o promieniu R (na rysunku punkt A jest punktem styczności),



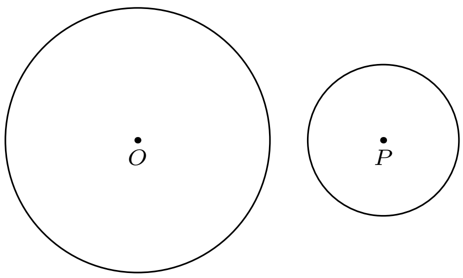
- jeśli $R - r < d < R + r$, to okręgi mają dwa punkty wspólne (na rysunku są to punkty A i B),



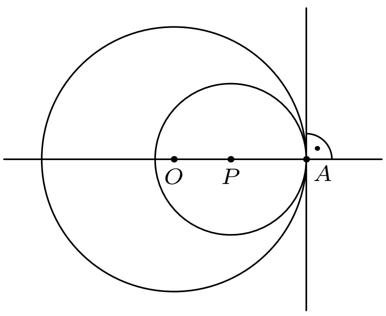
- jeśli $d = R+r$, to okręgi są styczne wewnętrznie (na rysunku punkt A jest punktem styczności),

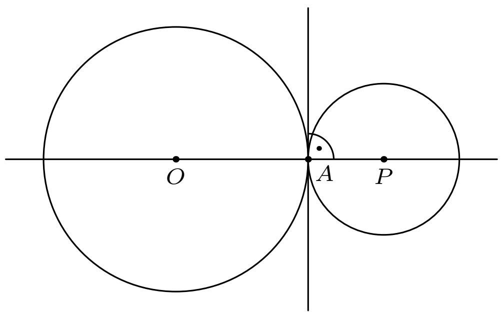


- jeśli $d > R+r$, to okrąg o promieniu r leży w całości na zewnątrz okręgu o promieniu R i na odwrót (mówimy wtedy, że okręgi są rozłączne zewnętrznie).

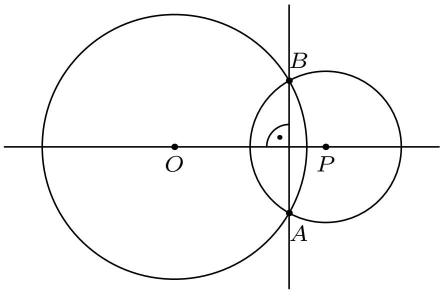


Następnie przypomnijmy, że punkt styczności jest współliniowy ze środkami obu okręgów oraz wspólna styczna do tych okręgów jest prostopadła do prostej przechodzącej przez środki obu okręgów.





Jeśli dwa okręgi mają dwa punkty wspólne A i B, to prosta przechodząca przez środki tych okręgów jest prostopadła do prostej AB i przecina odcinek AB w środku.



Następnie zajmijmy się własnościami równań prostej i okręgu. Przypuśćmy, że dana jest prosta k o równaniu postaci
$$ax + by = c.$$
Wówczas wektor o współrzędnych $[a, b]$ jest prostopadły do prostej k. W szczególności, jeśli dane są dwa punkty $O = (a, b)$ i $P = (c, d)$, to wektor $\overrightarrow{OP}$ ma współrzędne
$$\overrightarrow{OP} = [c - a, d - b].$$
Stąd wynika, że dla dowolnej liczby rzeczywistej t prosta o równaniu
$$(c - a)x + (d - b)y = t$$
jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{OP}$, a więc i do prostej OP.

Przypuśćmy teraz, że dane są dwa okręgi. Pierwszy ma środek w punkcie $O = (a, b)$ i promień równy R. Drugi ma środek w punkcie $P = (c, d)$ i promień równy r. Pierwszy okrąg ma zatem równanie
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$
Drugi okrąg ma równanie
$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2.$$
Odejmijmy stronami te równania:
$$(x - a)^2 - (x - c)^2 + (y - b)^2 - (y - d)^2 = R^2 - r^2.$$
Przekształćmy to równanie:
$$\begin{gathered}
(x^2 - 2ax + a^2) - (x^2 - 2cx + c^2) + (y^2 - 2by + b^2) - (y^2 - 2dy + d^2) = R^2 - r^2,\\
x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 2cx - c^2 + y^2 - 2by + b^2 - y^2 + 2dy - d^2 = R^2 - r^2,\\
-2ax + a^2 + 2cx - c^2 - 2by + b^2 + 2dy - d^2 = R^2 - r^2,\\
-2ax + 2cx - 2by + 2dy = R^2 - r^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2,\\
2(c - a)x + 2(d - b)y = R^2 - r^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2,\\
(c - a)x + (d - b)y = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - r^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2).
\end{gathered}$$

Otrzymaliśmy równanie prostej prostopadłej do prostej OP. Takich prostych jest jednak nieskończenie wiele. Chcemy wiedzieć, z którą z tych prostych mamy tu do czynienia.

Przypuśćmy teraz, że punkt $A = (x_0, y_0)$ jest punktem wspólnym tych dwóch okręgów (tzn. jest punktem styczności lub jednym z dwóch punktów przecięcia tych okręgów). Wówczas współrzędne punktu A spełniają oba równania:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2 \quad \text{oraz} \quad (x_0 - c)^2 + (y_0 - d)^2 = r^2.$$

Zatem
$$(x_0 - a)^2 - (x_0 - c)^2 + (y_0 - b)^2 - (y_0 - d)^2 = R^2 - r^2.$$

Po przekształceniach, takich jak wyżej, otrzymamy

$$(c - a)x_0 + (d - b)y_0 = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - r^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2).$$

Zatem współrzędne punktu A spełniają równanie prostej, które otrzymaliśmy wyżej. To dowodzi następującej własności równań dwóch okręgów.

Własność. Przypuśćmy, że okręgi o równaniach

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad \text{oraz} \quad (x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$$

są styczne lub przecinają się w dwóch punktach. Prosta o równaniu

$$(c - a)x + (d - b)y = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - r^2 + c^2 + d^2 - a^2 - b^2)$$

(otrzymanym przez odjęcie stronami równań obu okręgów) jest styczna do obu okręgów (w przypadku, gdy te okręgi są styczne) lub przechodzi przez punkty przecięcia obu okręgów (w przypadku, gdy te okręgi przecinają się w dwóch punktach).

W przypadku, gdy rozważane okręgi są rozłączne (wewnętrznie lub zewnętrznie), otrzymujemy równanie tzw. osi potęgowej tych okręgów; tym przypadkiem nie będziemy się tu jednak zajmowali.

Teraz przejdźmy do rozwiązania zadania 21.

Rozwiązanie. Najpierw znajdujemy równanie okręgu o środku S. Okrąg o równaniu

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$$

ma środek w punkcie o współrzędnych $(6, 8)$ i promień równy $R = 10$. Obliczamy odległość środków obu okręgów:

$$d^2 = (6 - 3)^2 + (8 - 2)^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45,$$

czyli $d = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Ponieważ okręgi są styczne wewnętrznie, więc promień r okręgu o środku S obliczamy z równania
$$d = R - r,$$

czyli

$$3\sqrt{5} = 10 - r.$$

Stąd $r = 10 - 3\sqrt{5}$. Równanie okręgu o środku S ma zatem postać

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (10 - 3\sqrt{5})^2,$$

czyli

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 145 - 60\sqrt{5}.$$

Teraz wystarczy odjąć stronami oba równania:

$$(x-3)^2 - (x-6)^2 + (y-2)^2 - (y-8)^2 = 145 - 60\sqrt{5} - 100.$$

Upraszczamy to równanie:

$$\begin{gathered}
x^2 - 6x + 9 - x^2 + 12x - 36 + y^2 - 4y + 4 - y^2 + 16y - 64 = 45 - 60\sqrt{5},\\
-6x + 9 + 12x - 36 - 4y + 4 + 16y - 64 = 45 - 60\sqrt{5},\\
6x + 12y + 13 - 100 = 45 - 60\sqrt{5},\\
6x + 12y = 100 + 45 - 13 - 60\sqrt{5},\\
6x + 12y = 132 - 60\sqrt{5},\\
x + 2y = 22 - 10\sqrt{5}.
\end{gathered}$$

Zatem równanie prostej stycznej do obu okręgów ma postać

$$x + 2y = 22 - 10\sqrt{5}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.